- Петрозаводский государственный университет;
- Муромцевский лесхоз-техникум;
- Тюменский лесотехнический техникум;
- Санкт-Петербургская государственная лесотехническая академия имени С.М. Кирова;
- Колледж строительной индустрии и городского хозяйства, г. Санкт-Петербург;
- Профессиональное училище № 21, г. Северодвинск.

Центр «ГеоС» на льготных условиях предоставляет учебным заведениям адаптированную версию программы, оказывает помощь в подготовке учебных классов и создании благоприятных условий для эффективного изучения программы. Основная цель сотрудничества с профильными заведениями страны – обеспечение высокой профессиональной подготовки специалистов и их последующего карьерного роста в ведущих компаниях, которые уже используют программу «К3-Мебель» в качестве основного рабочего инструмента.

Центр «ГеоС» готов к дальнейшему сотрудничеству с российскими учебными заведениями и оказанию максимальной помощи в подготовке учебного процесса.

УДК 694.143

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА ДЛЯ МОДЕЛИ ТРЕХСЛОЙНОГО КЛЕЕНОГО БРУСА

К.В. Зайцева,
канд. техн. наук, доцент, ФГБОУ ВПО «КГТУ», г. Кострома, РФ.
kseniya_zaiceva@mail.ru
А.А. Титунин,
д-р техн. наук, профессор, ФГБОУ ВПО «КГТУ», г. Кострома, РФ.
А.М. Ибрагимов,
д-р техн. наук, профессор, ФГБОУ ВПО «КГТУ», г. Кострома, РФ.

В статье представлена постановка задача теплопереноса для модели трехслойного клееного бруса, содержащего как бессучковую, так и древесину с сучками

В настоящее время широкое распространение получили жилые дома из клееного бруса, состоящие из нескольких слоев – ламелей. Древесина – природный материал, который имеет в своем составе как бессучковую древесину, так и участки с сучками, которые располагаются в ламелях.

Как правило, сучок имеет больший коэффициент теплопроводности (λ) и является при теплопереносе своеобразным «мостиком холода» по отношению к бессучковой древесине. На примере трехслойного бруса смоделируем задачу теплопереноса.

При физико-математической постановке задачи о теплопередаче через многослойное ограждение при неустановившемся режиме используем методику и обозначения, приведенные в [1].

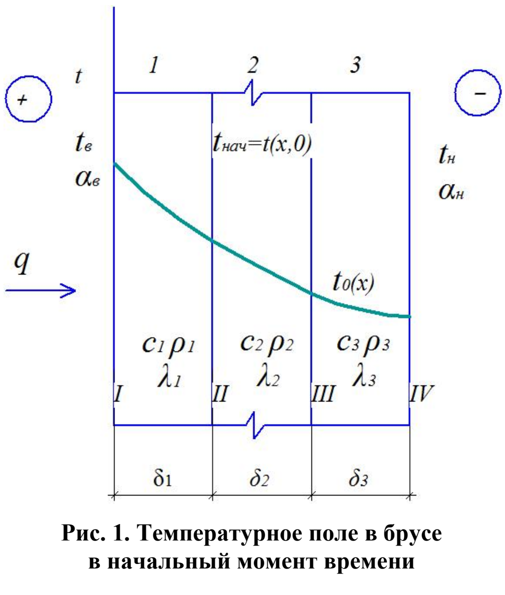

Рис. 1. Температурное поле в брусе в начальный момент времени

Имеем трехслойный брус (рис. 1). На левую плоскость слоя 1 подается тепловой поток q. Правая плоскость слоя 3 граничит с наружной (н) средой. Задача состоит в определении изменения температуры t(x,τ) и тепловых потоков q(x,τ) во времени (τ) и в пространстве по толщине ограждения (x). Точность теплотехнического расчета для строительных конструкций зависит от правильности выбранных значений их теплофизических характеристик. При расчетах обычно используют два основных показателя - коэффициенты: теплопроводности (λ) и объемной теплоемкости (cρ). Для линейного уравнения теплопроводности при λ и cρ=const вводят коэффициент температуропроводности (a).

$$a = \lambda/(c\rho). \tag{1}$$

Для решения задачи необходимо, чтобы были заданы:
- начальные условия, определяющие распределение температуры в толще и на границах ограждения в начальный момент времени;
- уравнения теплопроводности, описывающие процесс передачи тепла через толщу конструкции;
- граничные условия, определяющие условия теплообмена на всех характерных плоскостях.

Начальные условия могут быть заданы в виде уравнения, таблицы, графика распределения температуры в момент начала процесса (при $\tau = 0$). В общем случае уравнение начальных условий имеет вид:

$$t_{нач} = t(x, 0). \qquad (2)$$

Уравнение теплопроводности в общем случае имеет нелинейный вид:

$$\frac{\partial\left[t(x,\tau)\,c(x,\tau)\,\rho(x,\tau)\right]}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x,\tau)\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial x}\right], \qquad (3)$$

где значения коэффициента теплоемкости $[c(x,\tau)\cdot\rho(x,\tau)]$ и коэффициента теплопроводности $\lambda(x,\tau)$ изменяются от слоя к слою, завися от времени и температуры.

Для нашего случая удобно записать систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Каждое уравнение записываем для отдельного слоя с дополнительными граничными условиями на стыках слоев, полагая, что в пределах каждого отдельного слоя λ_i и $c_i\rho_i = const$ (i – номер слоя):

$$c_i\rho_i\frac{\partial t_i}{\partial\tau} = \lambda_i\frac{\partial^2 t_i}{\partial x^2}. \qquad (4)$$

На границе II (между 1 и 2 слоем), исходя из равенства тепловых потоков и температур, задаем условия четвертого рода:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1\frac{\partial t_1}{\partial x}\bigg|_{II} = \lambda_2\frac{\partial t_2}{\partial x}\bigg|_{II} \quad \text{или } q_1=q_2 \\ &t_1\Big|_{II} = t_2\Big|_{II} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Аналогично запишутся граничные условия на границе III.

Запишем граничные условия теплообмена на границах I и IV, т.е. на внутренней и наружной поверхностях ограждающей конструкции, которые соприкасаются с внутренним и наружным воздухом, а также окружены другими поверхностями. Внутренний воздух имеет температуру $t_в$, наружный – $t_н$. Если учитывать конвекцию (конвективный обмен), то в расчет вводим коэффициент $\alpha_к$, если лучистый обмен, то коэффициент $\alpha_л$. Если имеется источник тепла, тогда количество поглощенного поверхностью I лучистого тепла определяем по формуле:

$$q_п = p\cdot q, \qquad (6)$$

где p – коэффициент поглощения поверхности ограждения для данного излучения (принимается по таблицам);

q – интенсивность падающего на ограждение излучения от источника.

Если рассматривать самый общий случай, то на поверхности ограждений происходит сложный теплообмен, который определяется условиями второго рода (заданная интенсивность теплового потока) и условиями третьего рода (заданные условия теплообмена с окружающей средой). С учетом вышеизложенного, граничные условия на границе I имеют вид:

$$\alpha_{к.в}\left(t_в - t_1\Big|_I\right) + \alpha_{л.в}\left(t_{R.в} - t_1\Big|_I\right) + p_в q_в = -\lambda_1\frac{\partial t_1}{\partial x}\bigg|_I; \qquad (7)$$

здесь индекс (в) указывает на внутреннюю поверхность.

Граничные условия на границе IV имеют вид:

$$\alpha_{к.н}\left(t_3\Big|_{IV} - t_н\right) + \alpha_{л.н}\left(t_3\Big|_{IV} - t_{R.н}\right) + p_н q_н = -\lambda_3\frac{\partial t_3}{\partial x}\bigg|_{IV}; \qquad (8)$$

Для помещений условия лучисто-конвективного теплообмена в практике строительного проектирования учитывают единым коэффициентом теплообмена $\alpha_в$, тогда условие (7) примет вид:

$$\alpha_в\left(t_в - t_1\Big|_I\right) = -\lambda_1\frac{\partial t_1}{\partial x}\bigg|_I. \qquad (9)$$

Для зимних условий при натурных исследованиях и лабораторных условий при отсутствии в лаборатории источников тепла (отсутствие отопления в летний период) можно ввести аналогичное упрощение и для наружной поверхности исследуемого образца, тогда условие (8) примет вид:

$$\alpha_н\left(t_3\Big|_{IV} - t_н\right) = -\lambda_3\frac{\partial t_3}{\partial x}\bigg|_{IV}. \qquad (10)$$

Для летнего периода при натурных исследованиях необходимо учитывать солнечное излучение, при лабораторных исследованиях в отопительный период – излучение отопительных приборов лаборатории, тогда вместо (10) следует использовать условие вида:

$$\alpha_н \left(t_3 \Big|_{IV} - t_н \right) + p_н q_н = -\lambda_3 \frac{\partial t_3}{\partial x} \Big|_{IV} . \tag{11}$$

Условие (11) представляет собой смешанное граничное условие второго и третьего рода. Для удобства условие (11) можно привести к граничным условиям только III рода, введя условную температуру наружной среды ($t_{усл}$):

$$\alpha_н \left(t_{усл} - t_3 \Big|_{IV} \right) = -\lambda_3 \frac{\partial t_3}{\partial x} \Big|_{IV} ; \tag{12}$$

где $t_{усл} = t_н + p_н q_н / \alpha_н$. (13)

Итак, для нашей задачи, из общей ее постановки, выбираем для дальнейшего исследования:

- Начальные условия – выражение (2) в виде графика распределения температур в толще ограждения;
- Уравнения теплопроводности вида (4);
- Граничные условия:
  - на границе I – условие (8),
  - на границе II – условие (5),
  - на границе III – условие (6),
  - на границе IV – условие (10).

Решение задачи аналитическим способом вызывает большие математические трудности, поэтому предлагается математическая модель, которая позволяет их избежать и адекватно описать процесс нестационарного теплопереноса в многослойной конструкции.

Физическая картина процесса может быть представлена следующим образом (рис. 2*а*): многослойный (для простоты рассматривается трехслойный) клееный брус находится в стационарном положении, так, что распределения температур имеют вид:

$$t_1(x,0) = t_0;\ t_2(x,0) = t_0;\ t_3(x,0) = t_0. \tag{14}$$

В момент времени $\tau = 0$ с левой стороны бруса подается тепловой поток q, под влиянием которого первый слой начинает прогреваться (см. рис. 2*а*). Изменение полей температур характеризуется кривыми 1 и 2. При этом второй и третий слои останутся с температурой t_0.

В момент времени τ_1^* (кривая 3) тепловая волна достигает границы первого и второго слоев, и в этом месте появляется градиент температур:

$$grad\, t\left(\delta_1, \tau_1^*\right) = -\lambda_1 \frac{\partial t_1\left(\delta_1, \tau_1^*\right)}{\partial x} \tag{15}$$

Примечание:

Индекс (*) означает время, когда тепловая волна проходит все тело ламели.

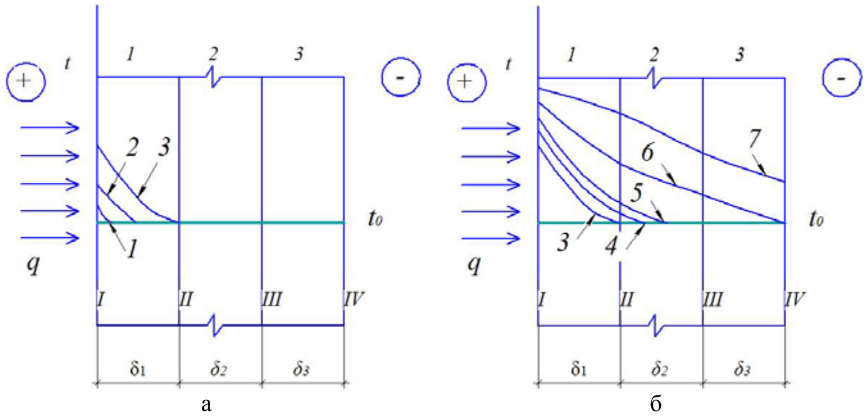

Рис. 2. Распределение полей температур в теле бруса в разный момент времени

После этого момента поле температур будет проникать глубже в брус, как показывают кривые 4 и 5. Температура третьего слоя остается равной t_0 до момента времени τ_2^*, когда тепловая волна дойдет до стыка второго и третьего слоя. И так далее.

В момент времени τ_3^*, когда тепловая волна достигнет внешней границы последнего слоя ограждения, в процессе теплопереноса оказываются, задействованы все слои ограждения, и этот момент времени может быть принят достаточным для определения сопротивления теплопередаче (R) при нестационарном процессе. При достаточно большом значении времени процесса, (теоретически при $\tau \to \infty$) в конструкции сформируется стационарное поле температур (прямая ломаная линия 7 см. рис. 2*б*), значения которого используется для расчета R. Для рассматриваемой модельной системы это будет выражаться следующим соотношением:

$$R=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{\delta_1}{\lambda_1}+\frac{\delta_2}{\lambda_2}+\frac{\delta_3}{\lambda_3}+\frac{1}{\alpha_2}=\frac{t_{вн}-t_{ср}}{q}, \tag{16}$$

где α_1, α_2 – коэффициент теплопередачи соответственно внутренней и наружной поверхности ограждающей конструкции

$t_{вн}$ – температура наружной поверхности первого слоя;

$t_{ср}$ – температура среды с теплой стороны.

Предлагаемая методика позволяет методом решения обратной задачи непосредственно рассчитывать значение R из нестационарного температурного поля.

Система уравнений (2), (4)–(6), (8), (12) является нелинейной и аналитически неразрешимой. Для решения задачи используем комбинированный метод решения краевых задач теплопереноса, который базируются на основе сочетания элементов аналитического и численного решения [1–6]. Особенностью представленной задачи является то, что средняя ламель имеет теплопроводные включения в виде сучка (рис. 3*б*).

Суть метода состоит в том, что весь процесс теплопереноса делится на ряд малых временных интервалов. В пределах каждого интервала предполагаем, что температура постоянна на границе II и III и постоянна плотность теплового потока через соприкасающиеся поверхности, т.е. идеальный тепловой контакт.

Общая задача разбивается на три автономные, но взаимосвязанные между собой.

Задача 1. Теплоперенос в слое 1 с граничными условиями третьего рода, которые учитывают конвективный обмен на границе I, и первого рода, которые характеризуют постоянство температуры на границе II слоев 1 и 2.

Задача 2. Теплоперенос в слое 2 с граничными условиями второго рода, которые характеризуют постоянство плотности теплового потока через границу II, и первого рода, характеризующие постоянство температуры на границе III.

Задача 3. Теплоперенос в слое 3 с граничными условиями второго рода на границе III и граничными условиями третьего рода, которые характеризуют теплообмен между поверхностью слоя 3 на границе IV с окружающей средой по закону Ньютона.

Каждая из этих задач решается аналитически. Решение общей задачи нестационарной теплопроводности можно получить в результате сопряжения этих аналитических решений на каждом временном интервале. Это позволяет перейти от граничных условий четвертого рода к граничным условиям первого и второго рода на поверхностях раздела слоев 1 и 2, 2 и 3, а также внутри слоя 2, где в пределах слоя присутствует сучок, имеют место граничные условия как 1, так и 2 рода, что облегчает решение задачи.

Математически задача теплопроводности для i-го слоя может быть записана следующим образом:

$$\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial \tau}=a\frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial x^2}; \quad (0\le x\le \delta_i); \tag{17}$$

где i – номер слоя.

Для **задачи 1** (см. рис. 3*а*) начальные условия имеют вид:

$$t(x,0)=t_0(x); \tag{18}$$

Граничные условия:

$$t(\delta,\tau)=t_\delta; \tag{19}$$

$$-\lambda_i\frac{\partial t(0,\tau)}{\partial x}=\alpha_в\left[t_c-t(0,\tau)\right]\cdot \tag{20}$$

Граничное условие (19) показывает, что поверхность II раздела слоев 1 и 2 имеет постоянную температуру t_δ. Условие (20) характеризует конвективный теплообмен на внешней поверхности I.

Примечание:

Индекс (1), указывающий на принадлежность выкладок к первому слою, для простоты записи опущен.

Задача 2 (см. рис. 3*б*). Условие задачи 2, согласно принятым ранее допущениям, можно сформулировать следующим образом: теплоперенос в неограниченной пластине с комбинированными граничными условиями второго рода на поверхности II и первого рода на поверхности III и неравномерными начальными условиями.

Начало координат поместим на стыке слоев, т.е. в сечении II.

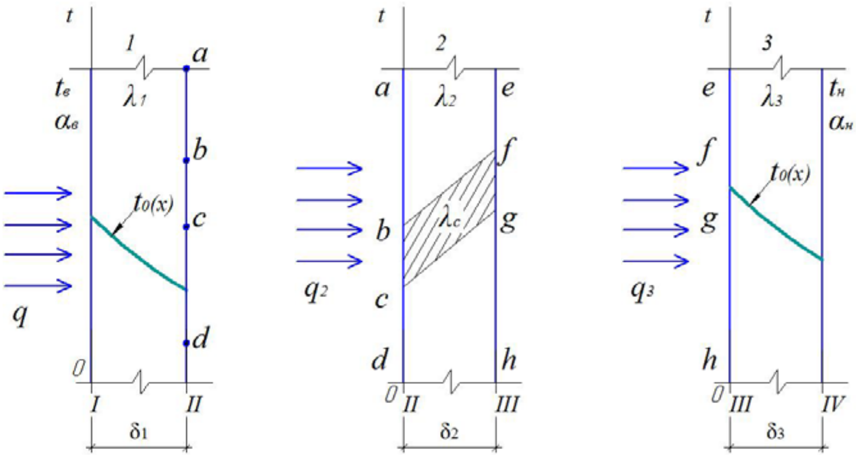

Рис. 2. Температурное поле в клееном брусе:
а – в первой ламеле; б – во второй ламеле; в – в третьей ламеле

Однако мы рассматриваем среднюю ламель, которая имеет сучок. В пределах этой ламели имеются несколько границ: граница II и граница III, а также границы бессучковой древесины с сучком по линии *bf* и *cg* (см. рис. 3*б*).

Теплоперенос внутри ламели с сучком описывается в любых комбинациях граничными условиями 1 и 2 рода.

Задача 3 (см. рис. 3*в*). Условие задачи 3 согласно принятым ранее допущениям можно сформулировать следующим образом: теплоперенос в неограниченной пластине с комбинированными граничными условиями второго рода на поверхности III и первого рода на поверхности IV и неравномерными начальными условиями.

На основе рассмотренной физико-математической модели можно определить коэффициент теплопроводности только для отдельных участков бруса. Однако из-за сложности учета количества, размеров и взаимного расположения сучков, содержащихся в ламелях, эта модель не пригодна для определения теплопроводности всего бруса. Поэтому в последующих публикациях будет рассмотрено решение задачи теплопроводности на основе метода конечных элементов и математической модели, отражающей взаимосвязь макроструктуры древесины и ее теплопроводности.

Выводы:

1. Сопротивление теплопередачи многослойного клееного бруса существенно зависит от расположения сучков по отношению к направлению теплового потока.
2. По предложенной методике можно решить прямую задачу, т.е. на стадии проектирования конструкции с учетом требуемого сопротивления теплопередачи определить необходимую толщину бруса или обратную задачу, которая решается при обследовании зданий - определить сопротивление теплопередачи действующей конструкции.
3. Эксперименты показывают, что даже одиночные сучки, не говоря уже о мутовчатых, значительно снижают сопротивление конструкции теплопередачи до 15 %.
4. Для расчета деревянных конструкций необходимо использовать приведенный коэффициент теплопередачи, учитывающий параметры сучковатости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богословский В.Н. Строительная теплофизика. (Теплофизические основы отопления, вентиляции и кондиционирования воздуха): учебник для вузов. – 3-е изд. – СПб.: АВОК Северо-Запад, 2006. – 400 с.
2. Федосов С.В., Гнедина Л.Ю. Нестационарный теплоперенос в многослойной ограждающей конструкции // Проблемы строительной теплофизики систем обеспечения микроклимата и энергосбережения в зданиях: сб. докл. четвертой науч.-практ. конф. 27–29 апреля 1999 г. – М.: НИИСФ, 1999. – С. 343–348.
3. Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. Теплопередача. – М.: Энергия, 1975. – 488 с.
4. Левинский Ю.Б., Онегин В. И., Черных А. Г. Деревянное домостроение / под ред. А. Г. Черных. – СПб., 2008. – 343 с.
5. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
6. Уголев Б.Н. Древесиноведение с основами лесного товароведения. – 4-е изд. – М.: МГУЛ, 2007. – 351 с.