

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Костромской государственный университет»  
(КГУ)

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

## **Методы оптимизации**

Направление подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»


Направленность подготовки «Прикладная математика и информатика»

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

**Кострома  
2019**


Рабочая программа дисциплины «**Методы оптимизации**» разработана в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика (уровень подготовки бакалавриат), утверждённым приказом №9 от 10.01.2018 г.

Разработал:  Ивков Владимир Анатольевич, доцент, к.э.н., доцент  
подпись

Рецензент:  Секованов Валерий Сергеевич, д.п.н, к.ф.-м.н., профессор КГУ  
подпись

УТВЕРЖДЕНО:

На заседании кафедры прикладной математики и информационных технологий  
Протокол заседания кафедры № 12 от 22.05.2019 г.

Заведующий кафедрой прикладной математики и информационных технологий  
 Секованов Валерий Сергеевич, д.п.н, к.ф.-м.н., профессор КГУ

## **1. Цели и задачи освоения дисциплины**

Цель дисциплины: изучение теории экстремальных задач и методов поиска оптимальных решений.

Задачи дисциплины:

– ознакомить с основными концепциями оптимизации и их применением для решения информационных задач в прикладных областях;

– овладеть принципами и понятийным аппаратом, описывающими современные методы прикладной математики;

– усвоить теоретические основы современных технологий и методов решения задач принятия решений.

## **2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине**

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

освоить компетенции:

ОПК3: Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности;

Код и содержание индикаторов компетенции

Индикаторы ОПК3:

ОПК-3.1. Знать: технологии разработки и анализа математических моделей в профессиональной деятельности

ОПК-3.2. Уметь: разрабатывать математические модели и проводить их анализ

ОПК-3.3. Иметь навыки: построения математических моделей в области профессиональной деятельности

Знать:

– основные концепции экстремальных задач;

– основные методы оптимизации;

– примеры задач оптимизации в прикладной области;

Уметь:

– находить оптимальные решения экстремальных задач;

– составить и решить задачу оптимизации;

– использовать информационные технологии для моделирования вычислительных процессов методов оптимизации.

Владеть:

– методами поиска оптимальных решений прикладных экстремальных задач.

## **3. Место дисциплины в структуре ОП ВО**

Дисциплина относится к обязательной части учебного плана. Изучается в шестом семестре(ах) обучения.

Изучение дисциплины основывается на ранее освоенных дисциплинах/практиках, полученных в рамках бакалавриата: математический анализ, линейная алгебра, теория вероятностей и математическая статистика, дифференциальные уравнения.

Изучение дисциплины является основой для освоения последующих дисциплин/практик, связанных с математическим моделированием.

Вместе с методами оптимизации компетенцию ОПК-3 формируют также дисциплины нелинейная динамика, основы синергетики, методы моделирования фрактальных множеств.

## **4. Объем дисциплины**

### **4.1. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием академических**

## часов и виды учебной работы

Виды учебной работы,	Очная форма
Общая трудоемкость в зачетных единицах	3
Общая трудоемкость в часах	108
Аудиторные занятия в часах, в том числе:	38
Лекции	16
Практические занятия	
Лабораторные занятия	22
Самостоятельная работа в часах	70
Форма промежуточной аттестации	Зачет

### 4.2. Объем контактной работы на 1 обучающегося

Виды учебных занятий	Очная форма
Лекции	16
Практические занятия	
Лабораторные занятия	22
Консультации	
Зачет/зачеты	
Экзамен/экзамены	
Курсовые работы	
Курсовые проекты	
Всего	38

## 5 Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам), с указанием количества часов и видов занятий

### 5.1 Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела, темы	Всего з.е/час	Аудиторные занятия			Самостоятельная работа
			Лекц.	Практ.	Лаб.	
1	Выпуклые множества и функции	0,39/14	2		2	10
2	Одномерная оптимизация	0,39/14	2		2	10
3	Многомерная оптимизация	0,39/14	2		2	10
4	ЗЛП. Симплекс-метод	0,39/14	2		2	10
5	Теория двойственности	0,39/14	2		2	10
6	Задачи транспортного типа	0,39/14	2		2	10
7	Нелинейное программирование	0,39/14	2		2	10
8	Вариационное исчисление и оптимальное управление	0,27/10	2		8	
	Итого:	3/108	16		22	70

## 5.2. Содержание:

**Тема 1. Выпуклые множества и функции.** Элементы выпуклого анализа. Понятие выпуклого множества. Выпуклый многогранник. Системы линейных неравенств. Выпуклые и вогнутые функции.

**Тема 2. Одномерная оптимизация.** Задачи одномерной оптимизации. Метод почти половинного деления. Метод золотого сечения. Метод Фибоначчи.

**Тема 3. Многомерная оптимизация.** Оптимизация функций многих переменных. Градиентные методы решения экстремальных задач. Метод покоординатного спуска. Метод градиентного спуска. Метод штрафных функций.

**Тема 4. ЗЛП. Симплекс-метод.** Задачи линейного программирования. Графический метод решения задач линейного программирования. Симплекс-метод решения задач линейного программирования.

**Тема 5. Теория двойственности.** Двойственные задачи. Алгоритм составления двойственной задачи. Теоремы двойственности.

**Тема 6. Задачи транспортного типа.** Транспортная задача (задача о назначениях). Алгоритм решения транспортной задачи. Метод северо-западного угла, метод наименьших затрат, метод потенциалов. Открытая модель транспортной задачи. Сетевые модели.

**Тема 7. Нелинейное программирование.** Дробно-линейное программирование. Выпуклое программирование. Алгоритмические методы решения нелинейных задач. Метод множителей Лагранжа. Теорема Куна-Таккера.

**Тема 8. Вариационное исчисление и оптимальное управление.** Вариации. Максимумы и минимумы определенных интегралов. Задача о брахистохроне. Решение вариационных задач с помощью дифференциальных уравнений. Задача Лагранжа. Решение вариационных задач прямыми методами. Метод Эйлера, метод Рунге, метод градиентного спуска. Основные понятия моделей управления. Фазовые координаты. Вектор управления. Пространство управления. Принцип максимума Понтрягина. Оптимальный процесс. Оптимальная траектория. Приближенное решение задач оптимального управления градиентными методами нелинейной оптимизации.

## 6. Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

### 6.1. Самостоятельная работа обучающихся по дисциплине (модулю)

№ п/п	Раздел (тема) дисциплины	Задание	Часы	Методические рекомендации по выполнению задания (при необходимости)	Форма контроля
1	Выпуклые множества и функции	Решение задач оптимизации	10	Решение оптимизационных задач из школьного учебника Колмогорова	Индивидуальное собеседование
2	Одномерная оптимизация	Выполнение лабораторной работы №1	10	Использование электронных таблиц	Отчет по лабораторной работе
3	Многомерная оптимизация	Выполнение лабораторной	10	Использование электронных таблиц	Отчет по лабораторной

		работы №2			работе
4	ЗЛП. Симплекс-метод	Выполнение лабораторной работы №3	10	Использование электронных таблиц	Отчет по лабораторной работе
5	Теория двойственности	Выполнение лабораторной работы №4	10	Использование электронных таблиц	Отчет по лабораторной работе
6	Задачи транспортного типа	Выполнение лабораторной работы №5	10	Использование электронных таблиц	Отчет по лабораторной работе
7	Нелинейное программирование	Выполнение лабораторной работы №6	10	Использование электронных таблиц	Отчет по лабораторной работе

## 6.2. Тематика и задания для лабораторных занятий

### Тема 1. Выпуклые множества и функции.

1. Исследовать на выпуклость множества

$$A = \{(x, y): 16x^2 + 25y^2 \leq 400, x^2 - 2x - y - 1 \leq 0\}$$

$$B = \{(x, y): 4x^2 + 9y^2 \leq 144, y + x^2 + 3 \geq 0\}$$

$$C = \{(x, y): x^2 + 4x - y + 1 \leq 0, y + |2x + 3| \leq 0\}$$

$$D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 16, y^2 - x \leq 0\}$$

$$E = \{(x, y): 25x^2 + 4y^2 \leq 100, y - x + 2 \geq 0\}$$

$$F = \{(x, y): x^2 + 2x - 5y - 3 \leq 0, y - |x| \leq 0\}$$

2. Исследовать на выпуклость функции

$$f(x, y) = x^2 - 4x + y^2 - 3y + 5$$

$$f(x, y) = -x^2 - 4(y - 1)^2 + 4x - 3$$

$$f(x, y) = x^2 - 4(y - 1)^2 - 6x + 10$$

$$f(x, y) = -x^2 - 4x + y^2 - 3y + 5$$

### Тема 2. Одномерная оптимизация.

Найти минимальное значение функции  $f(x)$  с точностью  $\varepsilon = 0,01$  методами прямого поиска:

- а) методом дихотомии;
- б) методом золотого сечения;
- в) методом Фибоначчи.

Вариант 1.

$$f(x) = x^3 - 3\sin x \rightarrow \min, x \in [0; 1].$$

Вариант 2.

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x} + x \rightarrow \min, x \in [0,5; 1,5].$$

Вариант 3.

$$f(x) = x^4 + x^2 + x + 1 \rightarrow \min, x \in [-1; 0].$$

Вариант 4.

$$f(x) = x \sin x + 2\cos x \rightarrow \min, x \in [-6; -4].$$

Вариант 5.

$$f(x)=x^2 - 2x + e^{-x} \rightarrow \min, x \in [-1; 1,5].$$

Вариант 6.

$$f(x)=x + \frac{1}{x^2} \rightarrow \min, x \in [1; 2].$$

Вариант 7.

$$f(x)=10x \ln x - \frac{x^2}{2} \rightarrow \min, x \in [0,1; 1].$$

Вариант 8.

$$f(x)=e^x - \frac{1}{3}x^3 + 2x \rightarrow \min, x \in [-2,5; -1].$$

Вариант 9.

$$f(x)=x^2 - 2x - 2\cos x \rightarrow \min, x \in [-0,5; 1].$$

Вариант 10.

$$f(x)=\frac{\cos x}{x^2} \rightarrow \min, x \in [1; 2].$$

### Тема 3. Многомерная оптимизация.

Исследовать функцию на выпуклость и найти экстремум

- используя критерий Сильвестра;

- на основе анализа собственных значений матрицы Гессе.

вариант	функция
1	$f(x)=3x_1^2+x_2^2+5x_3^2-5x_1-3x_2+5x_3 \rightarrow \min$
2	$f(x)=4x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-2x_1-x_2+2x_3 \rightarrow \min$
3	$f(x)=-5x_1^2-x_2^2-4x_3^2+5x_1-2x_2+3x_3 \rightarrow \max$
4	$f(x)=x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-3x_1+2x_2-4x_3 \rightarrow \min$
5	$f(x)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2x_1-x_2+3x_3 \rightarrow \min$
6	$f(x)=-3x_1^2-2x_2^2-5x_3^2+3x_1+3x_2-x_3 \rightarrow \max$
7	$f(x)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+3x_1-3x_2+3x_3 \rightarrow \min$
8	$f(x)=3x_1^2+5x_2^2+3x_3^2+2x_1-x_2-5x_3 \rightarrow \min$
9	$f(x)=-2x_1^2-5x_2^2-4x_3^2-4x_1+2x_2+4x_3 \rightarrow \max$
10	$f(x)=5x_1^2+3x_2^2+x_3^2-x_1+4x_2+2x_3 \rightarrow \min$

### Тема 4. ЗЛП. Симплекс-метод.

Решить симплекс-методом общую задачу линейного программирования, введя дополнительные неотрицательные переменные:

Дана исходная задача:  $F(x)=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4 \rightarrow \min$  при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \leq b_2 \\ x_{1,2,3,4} \geq 0 \end{cases}$$

Найти возможные альтернативные решения.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Значения										
$c_1$	2	3	-1	2	3	2	3	-1	-1	2
$c_2$	3	-1	1	1	-2	1	-1	3	1	-2
$c_3$	-1	1	3	-1	1	1	2	2	2	1

c <sub>4</sub>	1	2	1	2	2	-2	1	1	4	1
a <sub>11</sub>	1	2	-1	1	1	1	1	-1	1	2
a <sub>12</sub>	2	1	1	3	-1	1	2	1	3	1
a <sub>13</sub>	1	3	-1	-1	3	-1	-1	-1	-1	2
a <sub>14</sub>	-1	1	2	4	2	1	-1	3	-1	-1
b <sub>1</sub>	2	5	6	5	6	6	5	3	5	6
a <sub>21</sub>	2	2	2	-1	2	2	2	2	-1	3
a <sub>22</sub>	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1
a <sub>23</sub>	-1	-1	2	1	-3	2	1	2	-1	1
a <sub>24</sub>	2	2	-1	2	4	-1	-1	-1	2	2
b <sub>2</sub>	3	1	4	3	4	4	3	4	5	5

### Тема 5. Теория двойственности.

Составить задачу, двойственную данной, и решить ее графическим методом. Используя теоремы двойственности найти решение исходной задачи:

Дана исходная задача:  $F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \rightarrow \min$  при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \leq b_2 \\ x_{1,2,3,4} \geq 0 \end{cases}$$

№ варианта Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c <sub>1</sub>	2	3	-1	2	3	2	3	-1	-1	2
c <sub>2</sub>	3	-1	1	1	-2	1	-1	3	1	-2
c <sub>3</sub>	-1	1	3	-1	1	1	2	2	2	1
c <sub>4</sub>	1	2	1	2	2	-2	1	1	4	1
a <sub>11</sub>	1	2	-1	1	1	1	1	-1	1	2
a <sub>12</sub>	2	1	1	3	-1	1	2	1	3	1
a <sub>13</sub>	1	3	-1	-1	3	-1	-1	-1	-1	2
a <sub>14</sub>	-1	1	2	4	2	1	-1	3	-1	-1
b <sub>1</sub>	2	5	6	5	6	6	5	3	5	6
a <sub>21</sub>	2	2	2	-1	2	2	2	2	-1	3
a <sub>22</sub>	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1
a <sub>23</sub>	-1	-1	2	1	-3	2	1	2	-1	1
a <sub>24</sub>	2	2	-1	2	4	-1	-1	-1	2	2
b <sub>2</sub>	3	1	4	3	4	4	3	4	5	5

### Тема 6. Задачи транспортного типа.

Решить транспортную задачу, заданную распределительной таблицей, используя метод потенциалов:

	b <sub>j</sub>	30	25	15	30
a <sub>i</sub>					
40		c <sub>11</sub>	c <sub>12</sub>	c <sub>13</sub>	c <sub>14</sub>
20		c <sub>21</sub>	c <sub>22</sub>	c <sub>23</sub>	c <sub>24</sub>
40		c <sub>31</sub>	c <sub>32</sub>	c <sub>33</sub>	c <sub>34</sub>

Значения коэффициентов распределительной таблицы:

№ варианта Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c <sub>11</sub>	3	6	2	5	5	5	2	3	2	3
c <sub>12</sub>	5	2	6	4	3	3	5	1	4	1
c <sub>13</sub>	4	4	4	3	4	1	4	3	3	4
c <sub>14</sub>	4	2	4	2	2	3	1	5	2	6
c <sub>21</sub>	2	1	3	3	6	4	4	4	5	3



c <sub>22</sub>	1	5	5	3	5	5	5	2	2	2
c <sub>23</sub>	1	5	3	3	4	4	2	4	4	6
c <sub>24</sub>	3	6	1	1	4	2	6	3	1	5
c <sub>31</sub>	2	3	5	2	3	3	5	5	4	3
c <sub>32</sub>	5	1	5	1	5	2	4	1	5	2
c <sub>33</sub>	3	3	2	2	3	4	3	5	3	3
c <sub>34</sub>	5	2	5	5	2	5	1	5	5	5

### Тема 7. Нелинейное программирование.

Дана исходная задача с линейной целевой функцией и нелинейной системой ограничений:  
 $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max$  при ограничениях:  $x_1^2 + x_2^2 \leq b_1, x_{1,2} \geq 0$ .

Используя графический метод, найти глобальные экстремумы функции.

№ варианта Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c <sub>1</sub>	2	1	-1	2	-2	2	3	-2	2	-1
c <sub>2</sub>	3	2	-2	1	-1	3	2	-1	1	-2
b <sub>1</sub>	16	36	4	9	49	25	81	64	16	25

### Тема 8. Вариационное исчисление и оптимальное управление.

Найти экстремаль функционала, удовлетворяющую граничным условиям.

№ варианта	Текст задачи	№ варианта	Текст задачи
1	$J[y(x)] = \int_0^1 y^2 dx$	6	$J[y(x)] = \int_0^1 (x + y) dx$
2	$J[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + y'^2) dx$	7	$J[y(x)] = \int_0^1 (xy + y'^2) dx$
3	$J[y(x)] = \int_{-1}^0 (12xy - y'^2) dx$	8	$J[y(x)] = \int_0^1 (y^2 - y'^2) dx$
4	$J[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 - y^2) dx$	9	$J[y(x)] = \int_0^x y' \sin(y) dx$
5	$J[y(x)] = \int_0^1 yy' dx$	10	$J[y(x)] = \int_0^x y' \cos(y) dx$

## 7. Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная:

1. Гончаров В. А. Методы оптимизации: учебное пособие. – М.: Издательство Юрайт, 2010.
2. Галлеев Э. М. Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи: Учебное пособие. – М.: КомКнига, 2006.
3. Алексеев В. М., Галлеев Э. М., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: Учеб. пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

б) дополнительная:

4. Аттетков А. В. Введение в методы оптимизации. – М.: Финансы и статистика, 2008.

5. *Измаилов А. Ф., Солодов М. В.* Численные методы оптимизации: Учеб. пособие. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

6. *Ширяев В. И.* Исследование операций и численные методы оптимизации: Учебное пособие. – М.: КомКнига, 2007.

## **8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

*Информационно-образовательные ресурсы:*

1. Библиотека ГОСТов. Все ГОСТы, [Электронный ресурс], URL:<http://vsegost.com/>
2. Национальный открытый университет <http://intuit.ru/>

*Электронные библиотечные системы:*

1. ЭБС Университетская библиотека онлайн - <http://biblioclub.ru>
2. ЭБС «Лань» <https://e.lanbook.com>
3. ЭБС «ZNANIUM.COM» <http://znanium.com>

## **9. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Лекционные занятия проводятся в аудиториях с требуемым числом посадочных мест, оборудованные мультимедиа.

Практические занятия проводятся в компьютерных классах. Необходимое программное обеспечение:

Лицензионное программное обеспечение:

Математический пакет MathCad:

Свободно распространяемое программное обеспечение:

Офисный пакет.